

KRIGING – OD GÓRNICZEJ PRAKTYKI, POPRAZ TEORIĘ, DO ZASTOSOWAŃ ŚRODOWISKOWYCH

16.1 WPROWADZENIE

Istotną cechą, którą posiadają większość zbiorów danych geologicznych, geotechnicznych jest to, że ich elementy posiadają określone położenie w przestrzeni. Ważną rolę odgrywają takie cechy danych przestrzennych jak np. stopień ciągłości przestrzennej, anizotropia, trend, wartości nietypowe. Rozważając zjawiska przestrzenne, należy pamiętać, że najczęściej informacja o nich jest otrzymywana w wyniku dyskretnych pomiarów przeprowadzanych według założonego planu, które pokrywają mały ułamek badanego obszaru (najczęściej wiele rzędów wielkości mniejszy od niego). Z wielu praktycznych powodów pomiary takie podlegają wielu ograniczeniom i nie są wykonywane w sieciach regularnych. Konieczna jest więc interpolacja (lub ekstrapolacja) uzyskanej informacji na otoczenie punktów pomiarowych lub całość badanego obszaru. Zagadnienie to jest kluczowe w ocenie zasobów np. geologicznych, w szczególności górniczych [1, 2, 3, 4, 5] oraz przyrodniczych lub w zagadnieniach związanych z zanieczyszczeniem środowiska [6, 7, 8, 9]). Tymczasem jest ono bardzo trudne, gdyż zjawiska przestrzenne np. geologiczne, górnicze, pedologiczne charakteryzują się dużą złożonością. Od wyników, a zatem i od jakości interpolacji przestrzennej podejmowane jest wiele kluczowych decyzji np. od właściwej oceny zasobów złóż może zostać podjęta decyzja o budowie i konkretnej lokalizacji kopalni.

Metody interpolacji przestrzennej rozwijane były od dawna, ale dopiero od ostatnich kilkudziesięciu latach, przeżywają szczególnie gwałtowny rozwój dzięki wyłonieniu się geostatystyki jako pełnoprawnej i praktycznej dziedziny wiedzy na pograniczu statystyki i nauk przyrodniczych, w szczególności geologii oraz rewolucji informatycznej. Głównym celem tego artykułu jest przede wszystkim wyjaśnienie znaczenia, i możliwości metod kriginu. Celem dodatkowym jest przedstawienie czytelnikowi zarysu genezy tych metod, które powstały dzięki współpracy górników i statystyków. Artykuł skupia się na korzyściach jakie daje kriging i jest napisany bez rozbudowanego złożonego formalizmu matematycznego, który choć często konieczny powoduje, że metody kriginu są z jednej strony ciągle mało znane,

a z drugiej strony trywializowane. Szczegółowe założenia, i wyprowadzenie wybranych metod krigingu zostały opisane w pracy [10], na której niniejszy artykuł bazuje. Ze względu na ograniczoną objętość artykułu, znaczenie i możliwości metod krigingu będzie wyjaśnione głównie na przykładzie najczęściej stosowanego krigingu zwyczajnego.

16.2 POCZĄTKI KRIGINGU

Oprócz krigingu istnieje mnogość różnych metod interpolacji. Do najbardziej popularnych należą np. triangulacja zwana czasami metodą trójkątów (ang. *triangulation*), metoda wielokątów Thiessen'a (Voronoi), (ang. *Thiessen, Voronoi polygons method*), metoda minimalnej krzywizny (ang. *minimum curvature*), najbliższego sąsiada (ang. *nearest neighbor method*), naturalnych sąsiadów (ang. *natural neighbor method*), metoda odwrotnych odległości (ang. *inverse distance weighting method*), interpolacja wielomianowa zwana też interpolacją Lagrange'a (ang. *polynomial regression method, Lagrange's method*), metoda Sheparda (ang. *Shepard's method*), metoda funkcji sklepanych (ang. *spline functions method*) [10]. Różne są też sposoby klasyfikacji metod interpolacji przestrzennej. Do najważniejszych należy podział na metody deterministyczne, które wykorzystując różnorakie funkcje interpolujące tworzą model jednoznacznie określonej powierzchni, ale nie uwzględniają informacji statystycznej dostępnej w zbiorach danych, oraz metody stochastyczne (niedeterministyczne), które ją uwzględniają. Istotny jest również podział na estymację lokalną (punktową), w której dokonujemy estymacji badanej zmiennej (lub jej wybranego parametru statystycznego np. średniej) wielokrotnie w wybranych, badanych punktach, lub estymację globalną, w której dokonujemy estymacji zmiennej (albo wybranego parametru) na większym obszarze. Metody interpolacji dzielimy też na wierne lub wygładzające w zależności od tego czy uwzględniają ściśle dane pomiarowe. Z powodów, które zostaną wyjaśnione poniżej żadna z wyżej wymienionych metod nie odniosła takiego sukcesu jak kriging.

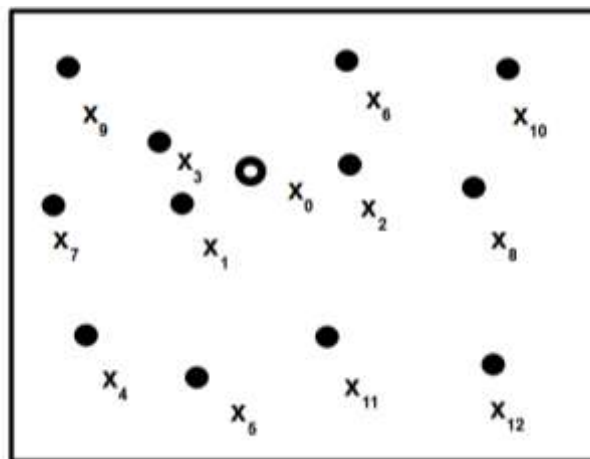
Początki metod geostatystycznych, w tym ich „motoru” – krigingu związane były z poszukiwaniem liniowego, optymalnego estymatora przestrzennego. Podwaliny tych metod pojawiły się już w pierwszej połowie dwudziestego wieku i związane są z wieloma wybitnymi matematykami i statystykami takimi jak np. H.O.A. Wold, A. Kołmogorow, N. Wiener, A.M Yaglom, L.S. Gandin, B. Matern, G. Jowett. Jednak przełomowymi okazały się dopiero empiryczne prace południowoafrykańskiego geologa Daniela G. Krige'a zajmującego się m.in. eksploatacją złóż złota w Afryce Południowej, a następnie rozwinięte i spopularyzowane przez francuskiego matematyka Georgesa Matherona na początku lat sześćdziesiątych dwudziestego wieku. D.G. Krige w latach 1938-1943 pracował w kopalni złota Anglovaal Group, gdzie zdobył praktyczne doświadczenie w opróbowaniu, geodezji, szacowaniu złóż. W 1951, w wieku 19 lat, obronił pracę magisterską na uniwersytecie w Witwatersrand (Wits) pod tytułem „*A statistical approach to some mine valuations*

and allied problems at the Witwatersrand" [11]. Georges Matheron, który był absolwentem École Polytechnique oraz Ecole des Mines de Paris dostrzegł ogromny potencjał teoretyczny i praktyczny prac Daniela G. Krige'a. Opracowana przez Georgesa Matherona technika estymacji w nieopróbowanym miejscu została w 1960r. nazwana na cześć Daniela G. Krige'a po raz pierwszy krigingiem (ang. kriging, fr. krigeage). Należy podkreślić, że to właśnie Georges Matheron stworzył najbardziej spójny i przejrzysty formalizm teoretyczny geostatystyki [12, 13] (również tej nazwy też użył jako pierwszy), wniósł do niej wiele własnych idei. Zarówno solidne podstawy matematyczne jak i odpowiedni formalizm spowodował, że metody krigingu zaczęły być rozwijane i stosowane w wielu krajach świata.

16.3 KRIGING JAKO NAJLEPSZY, LINIOWY, NIEOBciążONY ESTYMATOR PRZESTRZENNY

W dowolnych punktach, gdzie nie były wykonane pomiary badanej wielkości, można oszacować jej nieznaną, prawdziwą wartość używając ważonej, liniowej kombinacji wartości zmierzonych tej wielkości w sąsiednich położeniach (rysunek 16.1). Szacowania (estymacji) nieznannej wartości Z^* w położeniu x_0 dokonuje się wykorzystując zbiór wag $\{\lambda_i\}$, wyznaczony metodą krigingu, gdzie k oznacza liczbę punktów pomiarowych.

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Z(x_i) \quad (1)$$



Rys. 16.1 Szacowanie nieznannej wartości badanej wielkości $Z^*(x_0)$ w punkcie x_0 (oznaczonym kółkiem), w którym nie wykonano pomiaru, przy pomocy ważonej, liniowej kombinacji wartości tej wielkości $Z(x_i)$ zmierzonych w sąsiednich położeniach x_i (oznaczonych czarnymi punktami)

Źródło: [10]

Błąd $r(x_0)$ estymowanej wartości $Z^*(x_0)$ w położeniu x_0 definiuje się jako różnicę między estymowaną i prawdziwą wartością badanej wielkości w danym położeniu: $r(x_0) = Z^*(x_0) - Z(x_0)$. Niestety powyższe stwierdzenie, choć jest prawdziwe, z praktycznego punktu widzenia nieużyteczne, ponieważ zawiera nieznaną wartość $Z(x_0)$, a więc nie pozwala nam wyznaczyć błędu, ani jego rozkładu.

Cele krigingu są więc bardzo ambitne i w sensie praktycznym nieosiągalne skoro zarówno średnia błędów oraz wariancja błędów są zawsze nieznanne. Najlepszą rzeczą jaką można zrobić w takiej sytuacji jest zbudowanie modelu zbioru danych i badanie błędów średniej i wariancji modelu. W krigingu używa się modelu danych wyznaczonego przy zastosowaniu teorii funkcji losowych, w którym obciążenie i wariancja błędu mogą być wyliczone. Następnie dobiera się tak wagi dla wartości otrzymanych podczas pomiaru, aby zapewnić żeby *średnia błędów w wybranym modelu* była równa zeru i aby *wariancja błędów w tym modelu* była minimalna.

Jakość metod estymacji punktowej można określać używając różnych kryteriów. Metoda krigingu określana jest często akronimem angielskim B.L.U.E. (ang. *best linear unbiased estimator*) oznaczającym najlepszy, liniowy, nieobciążony estymator. Kriging jest:

- 1) najlepszy w tym sensie, że minimalizuje wariancję błędów,
- 2) liniowy ponieważ jego oszacowania są liniowymi, ważonymi, kombinacjami dostępnych danych,
- 3) nieobciążony ponieważ jego celem jest to, aby średnia błędów była równa zeru.

Tradycyjne metody estymacji punktowej takich jak np. metoda wielokątów, triangulacja, metoda średniej lokalnej oraz metoda odwrotnych odległości są również liniowe oraz przynajmniej teoretycznie nieobciążone. Może wydawać się, że kriging odróżnia się, więc od tych metod głównie minimalizacją wariancji błędów i (co zostanie dalej pokazane) możliwością wyznaczenia rozkładu przestrzennego tej wariancji błędów na badanym obszarze. Należy jednak też podkreślić, że ściśle wyprowadzenie metody krigingu na podstawie teorii funkcji losowych ma również tę zaletę, że umożliwia wykorzystanie informacji statystycznej dostępnej w empirycznych zbiorach danych w sposób metodyczny i pozwala na dalszy rozwój metod geostatystycznych, w tym na mniej znane zastosowania jak np. planowanie sieci pomiarowych. W dalszej części artykułu główna uwaga zostanie skupiona na krigingu zwykłym, gdyż jest on podstawą do zrozumienia innych metod krigingu.

16.4 ZAŁOŻENIA I UKŁAD RÓWNAŃ KRIGINGU ZWYKŁEGO

Najbardziej znaną odmianą metody krigingu jest kriging ze stałą (brak trendu), ale nieznaną średnią zwany *krigingiem zwykłym lub zwyczajnym* (ang. *ordinary kriging system*) albo po prostu *krigingiem*. Kriging zwykły uważa się za jeden z głównych filarów geostatystyki wraz z pojęciami zmiennej zregionalizowanej, hipotezy wewnętrznej, czy semiwariancji. Jego znaczenie i popularność nie wynika jedynie z jego zalet wymienionych powyżej w punktach 1-3, ale również z tego, że jego stosowanie wymaga bardzo ograniczonych założeń. Minimalnym założeniem metody krigingu jest, aby funkcja losowa $Z(\mathbf{x})$ (zwana w geostatystyce również funkcją zregionalizowaną, dla podkreślenia korelacji przestrzennych, które wykazują opisywane przez nią zjawiska), była tzw. funkcją wewnętrzną, czyli aby spełniała dwa założenia:

1) istnieje wartość oczekiwana funkcji zregionalizowana $Z(x)$ niezależna od wektora położenia x ,

$$\forall x \mathbf{E}\{Z(x)\} = m \quad (2a)$$

2) dla dowolnego wektora separacji h przyrost funkcji zregionalizowanej [$Z(x+h) - Z(x)$] posiada skończoną wariancję, niezależną od wektora położenia x , a jedynie od wektora separacji h .

$$\forall x \frac{1}{2} \text{Var}\{Z(x+h) - Z(x)\} = \frac{1}{2} \mathbf{E}\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\} = \gamma(h) \quad (2b)$$

Powyższe założenia, nazywane są *hipotezą wewnętrzną*, która jest najłagodniejszym warunkiem jednorodności przestrzennej (zwanej często również stacjonarnością przestrzenną) wymaganym w odniesieniu do badanego zbioru danych. Inne, silniejsze założenia są szczegółowo opisane w [10], ale w praktyce, ze względu na większe wymagania mają ograniczone znaczenie. Na przykład zamiast semiwariancji można stosować kowariancję, jednak niezbędna staje się wówczas znajomość średniej m . Hipotezę wewnętrzną stosuje się w sytuacjach, gdy ma się do czynienia ze zjawiskami w których nawet nie istnieje wariancja zmiennej zregionalizowanej $Z(x)$ natomiast można policzyć wariancję (przyrostów tej zmiennej).

W rezultacie minimalizacji wyrażenia na wariancję błędów kriginu, przy założeniu braku obciążenia otrzymuje się następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) = \gamma(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1) \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_2) = \gamma(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) = \gamma(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_k) \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \end{array} \right. \quad (3)$$

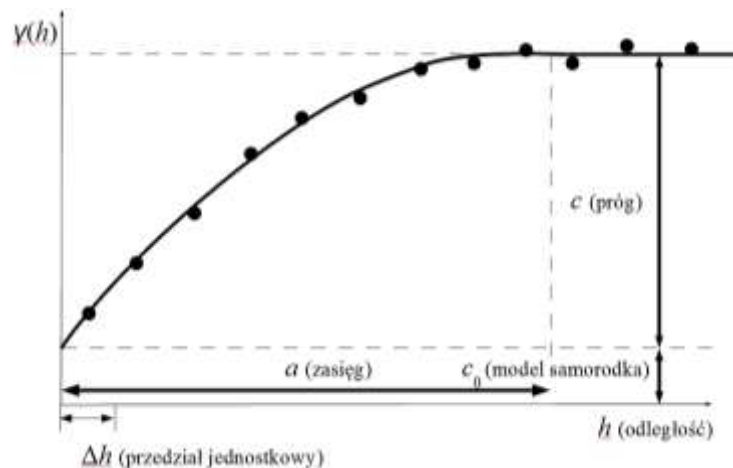
zwany *układem kriginu zwykłego*. Wielkość $\gamma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)$ jest semiwariancją teoretyczną (semiwariancją) pomiędzy punktami pomiarowymi \mathbf{x}_i oraz \mathbf{x}_k , zaś $\gamma(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_k)$ jest semiwariancją pomiędzy punktem pomiarowym \mathbf{x}_k i punktem estymacji \mathbf{x}_0 . Semiwariancja teoretyczna dana wzorem (4) jest funkcją odległości (i w przypadku badań anizotropowych kierunku) i stanowi model ciągłości przestrzennej (korelacji przestrzennych) drogą modelowania semiwariancji eksperymentalnej (empirycznej), obliczanej z wartości pomiarowych, pogrupowanych według ich współrzędnych z pewną tolerancją.

Estymatorem funkcji semiwariancji jest połowa średniej kwadratów różnic pomiędzy sparowanymi danymi:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{(i,j) \mathbf{h}_{ij}=\mathbf{h}} (Z(\mathbf{x}_i) - Z(\mathbf{x}_j + \mathbf{h}))^2, \quad (4)$$

gdzie:

$N(\mathbf{h})$ oznacza liczbę par punktów, odległych o (swobodny) wektor separacji $\mathbf{h} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$. Wykres semiwariancji nazywany jest zwyczajowo wariogramem (lub poprawniej semiwariogramem). Wartości wariogramu zależą od długości oraz kierunku wektora \mathbf{h} . Na rysunku 16.2 przedstawiono przykładowy (klasyczny) kształt wariogramu.



Rys. 16.2 Przykładowy wariogram empiryczny (czarne punkty), czyli wykres zależności semiwariancji empirycznej od odległości pomiędzy punktami pomiarowymi h .
Linia ciągłą zaznaczono również model teoretyczny wariogramu (semiwariancję teoretyczną), który stanowi aproksymację wariogramu empirycznego.
Na wykresie zaznaczono najważniejsze parametry modelu wariogramu: model samorodków (ang. *nugget effect*), zwany również modelem losowym, c_0 , zakres (ang. *range*), a oraz próg (ang. *sill*), c

Źródło: [10]

Obliczenia i sposób modelowania semiwariancji eksperymentalnej, które prowadzą do wyznaczenia semiwariancji teoretycznej zostały szczegółowo opisane w pracy [10], więc nie będzie tutaj omawiane. Najczęściej wykonuje się to przy pomocy odpowiedniego programu komputerowego takich jak Surfer, ArcGIS, ISATIS, QGIS, GS+ i wielu innych. Dla zrozumienia dalszej części wystarczy zapamiętać, że po wykonaniu modelowania wartości semiwariancji teoretycznej (i wariogramu) są wyłącznie funkcją odległości (oraz ewentualnie kierunku) tj. długości i kierunku wektora \mathbf{h} .

Oczywiście, układ równań kriginu (3) można zapisać również w formie macierzowej:

$$\Gamma \cdot \lambda = D \quad (5)$$

W powyższym równaniu Γ jest macierzą semiwariancji teoretycznych pomiędzy punktami pomiarowymi, λ jest wektorem wag, zaś wektor D oznacza wektor semiwariancji teoretycznych pomiędzy punktem estymacji i punktami pomiarowymi.

16.5 ZNACZENIE WARIANCJI KRIGINGU W PLANOWANIU SIECI POMIAROWYCH

Zrozumienie metody kriginu pozwala na zaplanowanie sieci pomiarowej, w sposób znacznie bardziej efektywny niż było to robione tradycyjnie.

Planowanie i dokładną analizę jakości opróbowania przestrzennego można bowiem wykonać szacując wariancję kriginu na podstawie równania:

$$\sigma_{OK}^2(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_i) - \mu \quad (6)$$

Podobnie, jak układ kriginu, można również zapisać równanie na wariancję

krigingu w postaci macierzowej:

$$\sigma_{OK}^2(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{D} \quad (7)$$

We wzorze (6) znajdują się jedynie wagi krigingu $\{\lambda_i\}$, oraz wartości modelu semiwariancji pomiędzy punktem pomiarowym \mathbf{x}_i a punktem estymacji \mathbf{x}_0 oraz mnożnik Lagrange'a μ . Wagi krigingu oraz mnożnik Lagrange'a otrzymuje się rozwiązując układ krigingu (równanie 3), korzystając ze znajomości położenia punktów pomiarowych oraz odpowiedniego modelu semiwariancji (korelacji przestrzennych). W praktyce rozkład przestrzenny estymowane wartości $Z^*(\mathbf{x})$ oraz wariancji krigingu $\sigma_{OK}^2(\mathbf{x})$ na badanym obszarze jest wyznaczany automatycznie przy pomocy pakietów geostatystycznych, na podstawie odpowiedniego modelu semiwariancji.

Zatem wariancja krigingu (równanie 6), podobnie jak wagi krigingu (układ równań 3), zależy wyłącznie od:

- 1) konfiguracji sieci pomiarowej (rozkładu punktów pomiarowych),
- 2) modelu semiwariancji.

Jednocześnie wariancja krigingu nie zależy bezpośrednio od wartości zmiennej $Z(\mathbf{x})$ w punktach pomiarowych.

Oznacza to, że znając model ciągłości przestrzennej (semiwariancję teoretyczną) badanej wielkości można, dla dowolnie wybranej konfiguracji, wyliczyć wartość wariancji krigingu a zatem dokładność estymacji przestrzennej określoną wartością wariancji krigingu przed wykonaniem pomiarów.

Można więc, przeprowadzić planowanie sieci pomiarowej w oparciu o model semiwariancji przed wykonaniem kampanii pomiarowej [14, 15, 16].

Podstawowym zadaniem przy planowaniu sieci pomiarowej jest, więc przede wszystkim wyznaczenie modelu zmienności przestrzennej (np. wyznaczenie modelu semiwariancji) w oparciu o semiwariancję empiryczną [17, 18, 19].

Wyznaczenie modelu semiwariancji jest zazwyczaj znacznie łatwiejsze niż wykonanie dokładnego opróbowania, gdyż można ją wyznaczyć, w oparciu o pomiary wstępne (pilotażowe) na danym obszarze lub dobrać rodzaj i parametry modelu semiwariancji w oparciu o wiedzę ekspercką. Następnie można planować geometrię sieci pomiarowej w taki sposób, aby zapewnić odpowiednio niski poziom wariancji krigingu (daną równaniem 4) oraz np. odpowiednio niski poziom kosztów uwzględniając również inne ograniczenia, jak np. geometrię badanego obszaru.

W przypadku wątpliwości co do jakości modelu semiwariancji „a priori” można zastosować podejście pośrednie pomiędzy wykonaniem pełnego opróbowania a wykonaniem tylko wstępnych pomiarów pilotażowych. Mianowicie stopniowo zagęszczać sieć pomiarową, wyliczając i modelując za każdym razem semiwariancję empiryczną. W momencie, gdy uzyska się satysfakcjonującą semiwariancję empiryczną tzn. umożliwiającą uzyskanie odpowiednio dokładnego modelu korelacji przestrzennych można przerwać wykonywanie pomiarów wstępnych. Następnie rozwiązując układ krigingu można wyznaczając kolejne wektory wag krigingu, i odpowiadające im rozkłady przestrzenne badanej zmiennej oraz

wariancji krigingu, dla stopniowo zagęszczanych sieci.

Rysunek 16.3 przedstawia schematycznie typową zależność wariancji krigingu w funkcji odległości pomiędzy punktami pomiarowymi. Taką zależność można np. otrzymać mając model semiwariancji wyznaczony z pomiarów wstępnych (pilotażowych) i rozważając sieci pomiarowe o różnych stałych (lub średniej odległości pomiędzy punktami pomiarowymi). Najczęściej zwiększanie odległości pomiędzy punktami pomiarowymi (np. w celu obniżenia kosztów opróbowania) nie zwiększa początkowo w sposób istotny wariancji krigingu. Jednak poczynając od pewnej wartości tej odległości wzrost wartości wariancji krigingu staje się bardziej gwałtowny. Można wybrać taką wartość stałej sieci, dla której wariancja ta nie przekracza wyznaczonej wartości dopuszczalnej wyznaczonej np. w pewnej proporcji do stałego poziomu wariancji krigingu (oznaczoną, przykładowo na rysunku 16.3 przerywaną linią).



Rys. 16.3 Przykładowy wykres zależności wariancji krigingu od średniej odległości między pomiarami

Źródło: [10]

Często nie wystarcza wyliczenie jednej uniwersalnej semiwariancji dla całego obszaru badań. Można jednak wstępnie podzielić badany obszar na kilka podobszarów, wewnątrz których można spodziewać się różnego charakteru rozkładu przestrzennego badanej zmiennej i dla każdego podobszaru wyznaczyć oddzielnie model semiwariancji, wykorzystywany następnie do obliczeń wariancji krigingu. Obliczenia takie można również wykonać np. metodą ruchomego okna. Warto zaznaczyć na zakończenie, że na podstawie znajomości modelu korelacji przestrzennych może być wyliczonych wiele różnych miar dokładności opróbowania (np. entropia). Jednak w związku z faktem, że podstawowymi narzędziami geostatystyki są semiwariancja i metody krigingu, najczęściej stosowaną miarą jest wariancja krigingu.

16.6 UWAGI O INNYCH RODZAJACH KRIGINGU

Oprócz najczęściej stosowanego krigingu zwyczajnego (zwykłego) stosuje się

również wiele innych rodzajów kriginu, będących wynikiem gwałtownego rozwoju geostatystyki stymulowanego rosnącymi potrzebami jej zastosowań. Bardziej szczegółowe informacje o pozostałych rodzajach kriginu można znaleźć w pracach [10, 20], które należą do pierwszych, systematycznych pozycji geostatystycznych w języku polskim, lub w zawartej w niej bibliografii.

Z praktycznego punktu widzenia w górnictwie i geologii szczególnie znaczenie ma krigin blokowy, który dostarcza średniej wartości badanej wielkości na pewnym obszarze (powierzchni lub objętości) oraz krigin wskaźnikowy, który jest ważnym rodzajem tzw. kriginu nieliniowego, stosowany m.in. do wyznaczania map prawdopodobieństwa występowania badanych zjawisk.

Jak wspomniano powyżej krigin zwyczajny, zakłada stałość średniej (jednorodność) badanego zjawiska na badanym obszarze, (choć w odróżnieniu od jeszcze prostszej odmiany – kriginu prostego (ang. simple kriging)), nie wymaga znajomości tej średniej. Naturalnym rozwinięciem stały się, więc te rodzaje kriginu, które w odróżnieniu od kriginu zwyczajnego, nie wymagają stałości średniej badanego zjawiska (jednorodności). Są to głównie krigin z trendem (ang. *kriging with trend*), zwany również kriginem uniwersalnym (ang. universal kriging) albo krigin z dryftem zewnętrznym (ang. *kriging with external drift*). W przypadku kriginu z trendem, trend średniej jest uważany za składnik deterministyczny, możliwy do modelowania analitycznego. Najczęstszą praktyką, jest stosowanie wielomianów współrzędnych geograficznych. W przypadku kriginu z zewnętrznym dryftem do modelowania trendu wykorzystuje się raczej zmiennych stowarzyszonych odzwierciedlających zachowanie się trendu.

W praktyce często stosowane są techniki kriginu w których dokonuje się transformacji badanych zmiennych takie jak krigin lognormalny lub logarytmiczno-normalny (ang. lognormal kriging), krigin wielo-gaussowski (ang. multi-gaussian kriging), wspomniany powyżej krigin wskaźnikowy (ang. indicator kriging), dysjunkcyjny (ang. disjunctive kriging). Tego typu odmiany stosuje się najczęściej w przypadku skomplikowanych rozkładów badanych zmiennych, lub jak np. w przypadku kriginu wskaźnikowego do wyznaczania map prawdopodobieństwa występowania badanych zjawisk.

Szczególnym rodzajem kriginu stosowanym w sytuacjach, gdy do estymacji przestrzennej używa się więcej niż jednej zmiennej jest również kokrigin (ang. cokriging). Stosowanie kokriginu jest bardzo korzystne, gdy pomiary zmiennej głównej są nieliczne (gdy są np. trudne do wykonania lub są kosztowne), zaś pomiary zmiennej dodatkowej (pobocznej) są liczne (łatwe do wykonania i stosunkowo tanie). Estymację jednej zmiennej poprawiamy, więc wykorzystując pomiary drugiej zmiennej. Jednocześnie krigin bywa złożony i wymaga specjalistycznej wiedzy geostatystycznej.

Na zakończenie tej części należy podkreślić, że liczba różnych metod kriginu jest znacznie większa niż powyżej wymienione. Metody kriginu są nadal intensywnie rozwijane i badane, w celu różnych nowych zastosowaniach np. do zastosowań

w zagadnieniach czasoprzestrzennych. Między innymi z powodu gwałtownego rozwoju w literaturze występują pewne niespójności terminologiczne w tym zakresie metod krigingu

16.7 PODSUMOWANIE

Metody krigingu, rozwijane od połowy dwudziestego wieku, oparte o teorię funkcji losowych odgrywają podstawową rolę w wielu zastosowaniach geologicznych w szczególności górniczych oraz środowiskowych. Metody te są oparte o teorię funkcji losowych i znalazły bardzo duże zastosowania praktyczne i nie ograniczają się wyłącznie do „wykonywania map”. Jednym z ważnych zastosowań metod krigingu jest efektywne planowanie sieci pomiarowych. Sieci pomiarowe można planować w bardzo różnorodnych lub złożonych sytuacjach, np. w sytuacji ograniczeń geometrycznych, skomplikowanych kształtach obszarów badawczych, ograniczonej liczby pomiarów itd. pomiarowych [16]. Metody krigingu wykazują swoją wyjątkową przydatność dzięki solidnym podstawom teoretycznym, które pozwalają zarówno na właściwe wykorzystywanie informacji statystycznej, jak i przestrzennej zawartej w badanych zbiorach danych, oraz zapewniają dużą elastyczność tych metod. Stosowanie metod krigingu nie jest trywialne, gdyż wymaga dobrej znajomości różnych wariantów tych metod, oraz umiejętności obliczania i modelowania semiwariancji. Najczęściej wymagane jest duże doświadczenie w dziedzinie z której dane pochodzą. Dlatego zalecana jest ścisła współpraca geostatystyków z fachowcami z konkretnej dziedziny. Metody krigingu są nadal intensywnie rozwijane i badane.

LITERATURA

- [1] Krige, D.G.: Some basic consideration in the application of geostatistics to gold ore valuation. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 3-14: pp. 383-391 1976.
- [2] Journel, A. G. i Huibregts, C. J.: *Mining Geostatistics*. Academic Press, London, 1978.
- [3] Rendu, J.: Kriging for Ore Valuation and Mine Planning. *Engineering and Mining Journal*, 81 (909), 1988.
- [4] Isaaks, E. H. i Srivastava, R. M.: *An Introduction to Applied Geostatistics*. Oxford University Press, New York, 1989.
- [5] Zawadzki, J., Fabijańczyk, P., Badura, H.: Estimation of methane content in coal mines using supplementary physical measurements and multivariable geostatistics, *International Journal of Coal Geology* 2013, 118, pp. 33-44.
- [6] Hengl T.: *A Practical Guide to Geostatistical Mapping*. University of Amsterdam, 2009. <http://spatial-analyst.net/book/download>.
- [7] Zawadzki, J., Cieszewski, C.J., Zasada, M., Lowe R.C.: Applying geostatistics for investigations of forest ecosystems using remote sensing imagery. *Silva Fenica*. 2005, 39(4): pp. 599-617.
- [8] Zawadzki, J.; Szuszkiewicz, M., Fabijańczyk, P.; Magiera T.: Geostatistical discrimination between different sources of soil pollutants using a magneto-geochemical data set. *Chemosphere*. 2016, 164, pp. 668-676.
- [9] Zawadzki, J.; Fabijańczyk, P.: Geostatistical evaluation of lead and zinc concentration in soils of an old mining area with complex land management *International Journal*

- of Environmental Science and Technology*, 2013, 10 (4), pp. 729-742.
- [10] Zawadzki, J.: *Metody geostatystyczne dla kierunków przyrodniczych i technicznych*, 2011, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- [11] Krige, D.G.: *A statistical approach to some mine valuations and allied problems at the Witwatersrand. Master's thesis*. University of Witwatersrand. South Africa, 1951.
- [12] Matheron G., Krigeage d'un panneau rectangulaire par sa périphérie, Note géostatistique no 28, Centre de Géostatistique, Fontainebleau, 1960
- [13] Matheron G.: *Traité de Géostatistique Appliquée*. Editions Technip., France, 1962.
- [14] Fabijańczyk, P., Zawadzki, J., Magiera T., Szuszkiewicz M.: A methodology of integration of magnetometric and geochemical soil contamination measurements, *Geoderma*, 2016, 277, pp. 51-60.
- [15] Cressie N.A.C.: *Statistics for spatial data*. John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [16] Groenigen, van, J.W.: Constrained optimisation of soil sampling for minimisation of the kriging variance. *Geoderma*, 87, Enschede, 1999.
- [17] David, M.: The practice of kriging. in *Geostat 75*, 1975.
- [18] Gringarten E., Deutsch C.V.: Teacher's Aide Variogram Interpretation and Modeling. *Mathematical Geology*, 33(4), 2001.
- [19] Royle, A.G.: Why geostatistics. *Engineering and Mining Journal*, 180, (5), 1979.
- [20] Barbara Namysłowska-Wilczyńska, B., *Geostatystyka: teoria i zastosowania*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2006

Data przesłania artykułu do Redakcji: 04.2020

Data akceptacji artykułu przez Redakcję: 05.2020

KRIGING – OD GÓRNICZEJ PRAKTYKI POPRZEZ TEORIĘ DO ZASTOSOWAŃ ŚRODOWISKOWYCH

Streszczenie: W artykule w przystępny sposób przedstawiono wybrane zagadnienia związane z metodą kriginu zwyczajnego, szeroko wykorzystywaną do estymacji zasobów górniczych. W szczególności opisano te jej właściwości, które choć zazwyczaj mniej znane to decydują o przydatności tej metody i umożliwiają kontrolę dokładności uzyskanych wyników. Szczególną uwagę poświęcono zastosowaniom roli wariacji kriginu, będącej miarą dokładności wyników otrzymanych za pomocą metody kriginu, oraz możliwości jej zastosowania do planowania sieci pomiarowych.

Słowa kluczowe: geostatystyka, kriging, wariacja kriginu, sieci pomiarowe, górnictwo, środowisko

KRIGING – FROM MINING PRACTICE THROUGH THEORY TO ENVIRONMENTAL APPLICATIONS

Abstract: The article presents, in an approachable way, selected issues related to the method of the ordinary kriging, which is widely used for the estimation of mining resources. In particular, such properties of the ordinary kriging were described, which are usually less known but determine its usefulness and accuracy. Particular attention was paid to the role of kriging variance, which is a measure of the accuracy of results obtained using the ordinary kriging. The possibility of using the kriging variance for planning measurement networks was also discussed.

Key words: geostatistics, kriging, kriging variance, measurements networks, mining, environment

Jarosław Zawadzki

Politechnika Warszawska

Wydział Instalacji Budowlanych, Hydrotechniki i Inżynierii Środowiska

ul. Nowowiejska 20, 00-653 Warszawa, Polska

e-mail: jaroslaw.zawadzki@pw.edu.pl